

Egy újabb térgeometriai feladat

Találtunk egy feladatot [1] - ben, amit most egy kicsit továbbgondolunk.

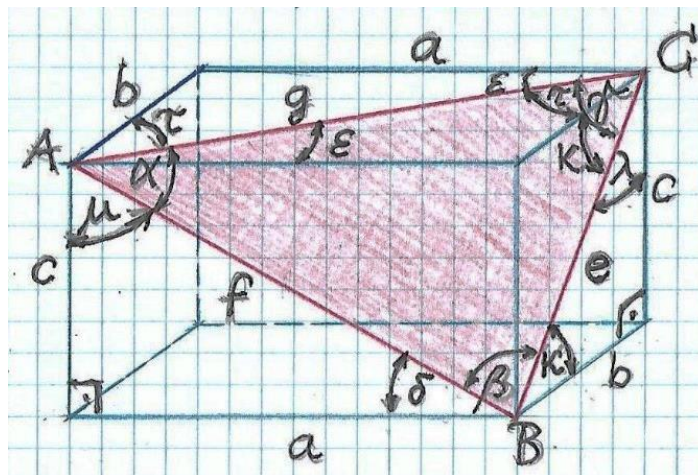
A feladat

Egy téglatest lapátlóinak hossza e, f, g . Számítsuk ki:

- ~ a téglatest éleinek a hosszát;
- ~ a lapátlók alkotta háromszög belső szögeit;
- ~ a lapátlók alkotta háromszög területét!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

1.) a, b, c meghatározása

Pitagorász tételének alkalmazásával:

$$a^2 + b^2 = g^2 ; \quad (1)$$

$$b^2 + c^2 = e^2 ; \quad (2)$$

$$a^2 + c^2 = f^2 . \quad (3)$$

Most (1) és (3) összegéből (2) - t kivonva:

$$2 \cdot a^2 = g^2 + f^2 - e^2 \rightarrow a^2 = \frac{g^2 + f^2 - e^2}{2} \rightarrow$$

$$\underline{\underline{a(e, f, g) = \sqrt{\frac{f^2 + g^2 - e^2}{2}} .}} \quad (4)$$

Teljesen hasonlóan:

$$\underline{\underline{b(e, f, g) = \sqrt{\frac{e^2 + g^2 - f^2}{2}}}}, \quad (5)$$

továbbá:

$$\underline{\underline{c(e, f, g) = \sqrt{\frac{e^2 + f^2 - g^2}{2}}}}. \quad (6)$$

2.) α, β, γ meghatározása

Koszinusztétellel:

$$e^2 = f^2 + g^2 - 2 \cdot f \cdot g \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{f^2 + g^2 - e^2}{2 \cdot f \cdot g}. \quad (7)$$

Most (4) és (7) - tel:

$$\cos \alpha = \frac{a^2}{f \cdot g} = \frac{a}{f} \cdot \frac{a}{g} = \sin \mu \cdot \sin \tau,$$

tehát:

$$\cos \alpha = \sin \mu \cdot \sin \tau \rightarrow \underline{\underline{\alpha = \arccos(\sin \mu \cdot \sin \tau)}}. \quad (8)$$

Teljesen hasonlóan:

$$\cos \beta = \sin \delta \cdot \sin \kappa \rightarrow \underline{\underline{\beta = \arccos(\sin \delta \cdot \sin \kappa)}}, \quad (9)$$

továbbá:

$$\cos \gamma = \sin \varepsilon \cdot \sin \lambda \rightarrow \underline{\underline{\gamma = \arccos(\sin \varepsilon \cdot \sin \lambda)}}. \quad (10)$$

Ellenőrzés:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \quad (11)$$

3.) T_{ABC} meghatározása

$$\begin{aligned} T_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot f \cdot g \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot f \cdot g \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} \cdot f \cdot g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a^2}{f \cdot g}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{f^2 \cdot g^2 - (a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{f^2 \cdot g^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - e^2}{2}\right)^2}, \end{aligned}$$

tehát:

$$\underline{\underline{T_{ABC}(e, f, g) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{f^2 \cdot g^2 - \left(\frac{f^2 + g^2 - e^2}{2}\right)^2}}}. \quad (12)$$

Megjegyzések:

M1. A (4), (5), (6) képletekkel már találkoztunk egy – vagy több – korábbi dolgozatunkban – ld.:*)!

A (8), (9), (10) képletekhez hasonlóval is találkoztunk már – ld.:**)!

M2. Figyeljük meg, hogy pl. az α szöget hogyan „fogják közre” a μ és τ szögek! (Azért az idézőjel, mert a közrefogás két, egymásra merőleges síkban történik.)

M3. Ha az α, β, γ szögeket is e, f, g - vel akarjuk kifejezni, akkor írhatjuk, hogy:

$$\cos \alpha = \frac{f^2 + g^2 - e^2}{2 \cdot f \cdot g} \rightarrow \alpha(e, f, g) = \arccos \left(\frac{f^2 + g^2 - e^2}{2 \cdot f \cdot g} \right) ; \quad (13)$$

$$\cos \beta = \frac{e^2 + f^2 - g^2}{2 \cdot e \cdot f} \rightarrow \beta(e, f, g) = \arccos \left(\frac{e^2 + f^2 - g^2}{2 \cdot e \cdot f} \right) ; \quad (14)$$

$$\cos \gamma = \frac{e^2 + g^2 - f^2}{2 \cdot e \cdot g} \rightarrow \gamma(e, f, g) = \arccos \left(\frac{e^2 + g^2 - f^2}{2 \cdot e \cdot g} \right) . \quad (15)$$

A (13), (14), (15) képletek a háromszög szögei definíciójaként is tekinthető.

A (8), (9), (10) képletek jó alkalmat teremtettek e szögeknek egyéb szögekkel való kapcsolatainak felírására.

M4. A T_{ABC} terület számításához most nem használtuk *Hérón* képletét.

M5. Részfeladat.

Határozzuk meg számítással az e, f, g oldalakkal bíró háromszög síkjának hajlását és lejtését!

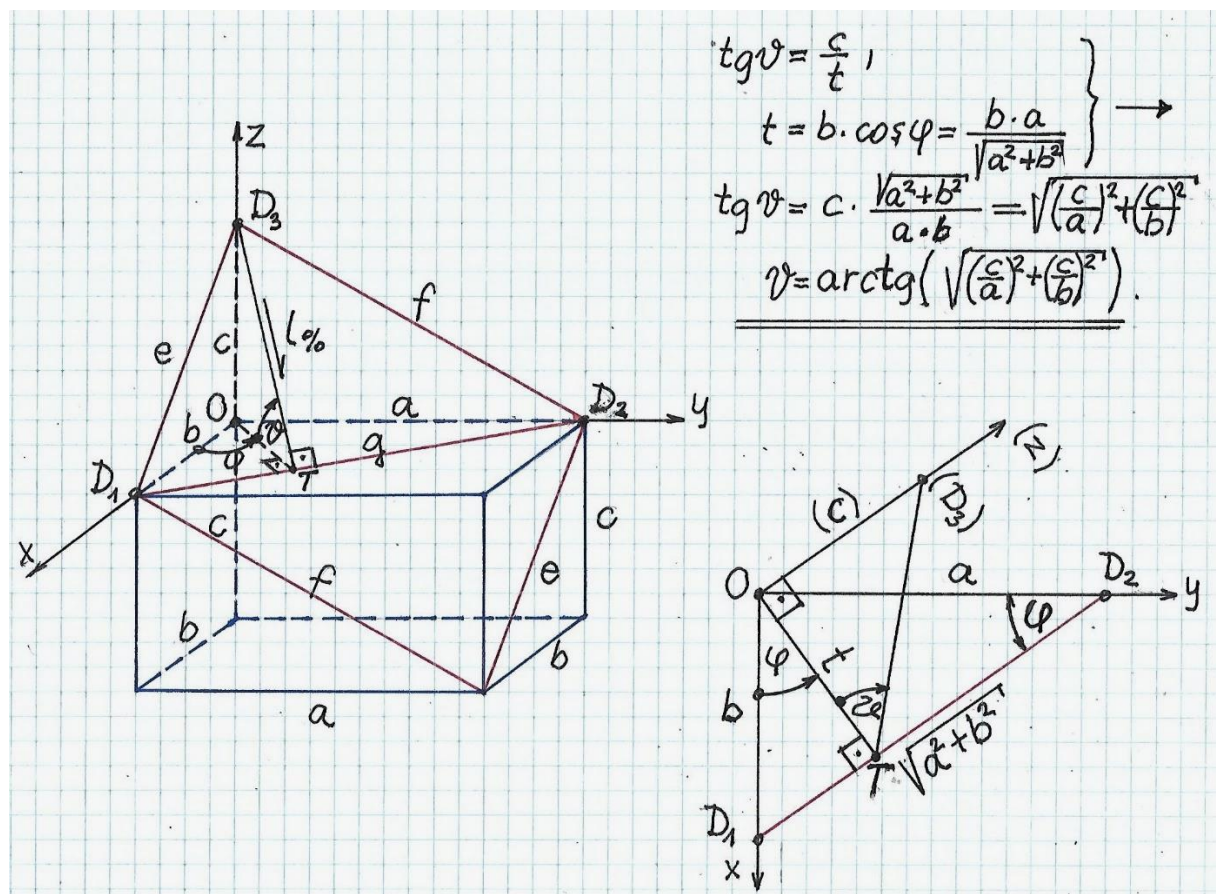
A megoldáshoz tekintsük a 2. ábrát!

Itt azt látjuk, hogy kiegészítettük az 1. ábrát – a háromszög síkját – egy - egy párhuzamosan eltolt e és f egyenessel, majd alkalmaztuk a már sokszor látott eljárást. Eszerint:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2}} . \quad (16)$$

Most (4), (5), (6) és (16) szerint:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{\frac{\frac{e^2 + f^2 - g^2}{2}}{\frac{f^2 + g^2 - e^2}{2}} + \frac{\frac{e^2 + f^2 - g^2}{2}}{\frac{e^2 + g^2 - f^2}{2}}} = \sqrt{\frac{e^2 + f^2 - g^2}{f^2 + g^2 - e^2} + \frac{e^2 + f^2 - g^2}{e^2 + g^2 - f^2}} =$$



2. ábra

$$= \sqrt{(e^2 + f^2 - g^2) \cdot \left(\frac{1}{f^2 + g^2 - e^2} + \frac{1}{e^2 + g^2 - f^2} \right)}, \text{ tehát:}$$

$$\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{(e^2 + f^2 - g^2) \cdot \left(\frac{1}{f^2 + g^2 - e^2} + \frac{1}{e^2 + g^2 - f^2} \right)}, \quad (17)$$

innen:

$$\vartheta(e, f, g) = \arctg \left[\sqrt{(e^2 + f^2 - g^2) \cdot \left(\frac{1}{f^2 + g^2 - e^2} + \frac{1}{e^2 + g^2 - f^2} \right)} \right]. \quad (18)$$

Egy sík százalékos lejtése – egy esésvonala hajlásszöge tangensének 100 - szorosa:

$$l = 100 \cdot \operatorname{tg} \vartheta (\%), \quad (19)$$

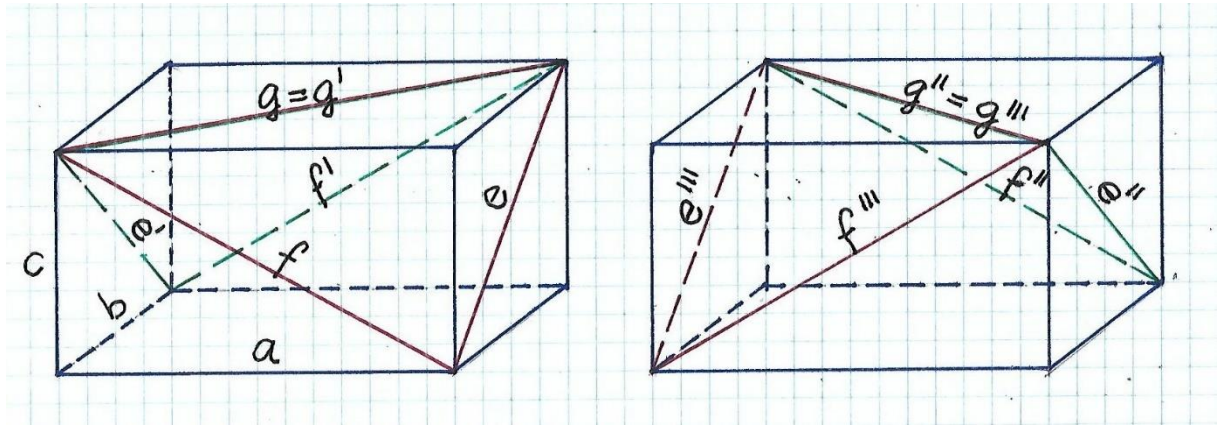
így (17) és (19) - cel az e, f, g egyenesek által alkotott sík százalékos lejtése:

$$l(e, f, g) = 100 \cdot \sqrt{(e^2 + f^2 - g^2) \cdot \left(\frac{1}{f^2 + g^2 - e^2} + \frac{1}{e^2 + g^2 - f^2} \right)} (\%). \quad (20)$$

Azonban az a, b, c élhosszúságú téglatestben van még három sík, amelyeknek ugyanazok

a jellemzői, mint az előbbinek; ezek:

- ~ az e', f', g' egyenesek alkotta sík ,
- ~ az e'', f'', g'' egyenesek alkotta sík ,
- ~ az e''', f''', g''' egyenesek alkotta sík – 3. ábra.



3. ábra

Mint ahogy nagyságuk szerint:

$$e' = e'' = e''' = e, \quad f' = f'' = f''' = f, \quad g' = g'' = g''' = g, \quad (21 / 1)$$

így fennáll, hogy:

$$\vartheta' = \vartheta'' = \vartheta''' = \vartheta, \quad l' = l'' = l''' = l. \quad (21 / 2)$$

Úgy is mondhatjuk, két kifelé – e, f, g , illetve e''', f''', g''' – és két befelé néző normálisú – e', f', g' , illetve e'', f'', g'' – síkunk van.

Ezzel a részfeladatot is megoldottuk.

Ajánlott olvasmányok:

*) [Tetraeder - feladat.pdf \(galgoczi.net\)](http://galgoczi.net/Tetraeder-feladat.pdf)

**) [Egy tergeometriai feladat_2.pdf \(galgoczi.net\)](http://galgoczi.net/Egy-tergeometriai-feladat-2.pdf)

Források:

[1] – Főszerk.: **Gerőcs László ~ Vancsó Ödön**: Matematika
Akadémiai Kiadó, Budapest, 2010.

Összeállította: ***Galgóczy Gyula***
ny. mérnöktanár

Szódliget, 2024. 09. 02.

Továbbiak: www.galgoczy.net